TASA DE INTERÉS ALEATORIA Y SU APLICACIÓN EN LA VALUACIÓN DE PLANES DE PENSIÓN

GONZALO DE ARMAS; SERGIO BARSZCZ[1]

RESUMEN

Por su importante función social, la valuación de planes de pensión es una tarea que debe ser cuidadosamente planificada y evaluada, a fin de garantizar el cobro de las jubilaciones presentes y futuras de los trabajadores.

En una primera parte de este trabajo se retoman los valores presentes actuariales de las contribuciones y beneficios futuros respecto a un participante en un plan de pensiones.

De esta forma, si el plan de pensiones pretende dar seguridad a sus participantes, la concesión detales beneficios futuros requerirá que los activos disponibles a la fecha junto con el valor presente actuarial de las futuras contribuciones se equilibren con tales beneficios futuros.

Bajo este esquema se trabaja con distintas herramientas que permiten incorporar aleatoriedad a la tasa de interés, levantando el supuesto de conocer la misma. Consideramos importante este paso porque dicha tasa es un componente que puede tener fuerte incidencia en los valores presentes actuariales tanto de las contribuciones como en los beneficios.

El marco teórico del trabajo está dado por los conceptos actuariales que se utilizan y la metodología de trabajo implica la definición de funciones útiles para resumir la situación financiera de un plan de pensión, así como también por procesos que modelen la aleatoriedad de la tasa de interés.

Palabras clave: Tasa de interés, Paseo aleatorio, Valuación de plan de pensión.

1 – Introducción

1.1 – Valuación de planes de pensión

"Una de las aplicaciones más importantes de los modelos de decremento múltiple se da en los planes de pensión. En primer lugar consideraremos métodos básicos usados para calcular el valor presente actuarial (vpa) de los beneficios y de las contribuciones para un participante de un plan de pensiones. Los participantes de un plan pueden ser un grupo de trabajadores de un único empleador o pueden ser los empleados de un grupo de empleadores que desarrollan actividades similares. Un plan pensado para la jubilación de un participante, típicamente provee jubilaciones por edad y años de servicios, por invalidez, por renuncia o despido o por muerte. Concentraremos nuestra atención en el beneficio de jubilación.

Un plan de pensiones puede ser visto como un sistema para comprar rentas de vida diferidas (pagaderas desde la jubilación hasta la muerte) y otros beneficios auxiliares, a través de una renta temporaria de contribuciones durante la vida activa. El balance de vpa de

[1] Unidad Académica Estadística

beneficios y contribuciones puede darse sobre una base individual pero frecuentemente es sobre una base agregada del grupo completo de participantes.” (Barszcz-Gonzalo de Armas, [4])

Se necesitan dos conjuntos de supuestos para calcular el vpa (valor presente actuarial) de los beneficios y las contribuciones de un plan de pensión: supuestos demográficos que implican tablas de decremento múltiple, para obtener la probabilidad de supervivencia del estado activo dentro de t años para una persona de edad x (${}_t p_x^{(\tau)}$) así como su probabilidad de decremento por las causas de jubilación $q_x^{(r)}$, fallecimiento $q_x^{(d)}$ e invalidez $q_x^{(i)}$ en base a las cuales se determina la evolución de la composición de la población activa, así como supuestos económicos sobre la evolución del salario:

$$(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$$

donde $(AS)_{x+h}$ es el salario actual a la edad x+h, $(ES)_{x+h+t}$ es el salario estimado a la edad x+h+t y S_x es una función de escala salarial.

Se deben hacer supuestos sobre la evolución de las jubilaciones, para las cuales supondremos que la función a considerar es $h(x)=e^{\beta(r-x)}$, esto es las pensiones son ajustadas a una tasa constante anual β

Finalmente se deben también hacer supuestos sobre la rentabilidad de las inversiones, en este trabajo se evaluará la misma introduciendo aleatoriedad en la tasa efectiva anual (TEA) y se compara con los resultados obtenidos trabajando con una TEA constante.

Consideramos un modelo con una población que ingresa al sistema a partir de la edad “a” que se jubilan a partir de la edad α y como máximo con una edad “r”, los cuales están expuestos a una función de supervivencia por todas las causas s(x), con s(a)=1. Para a<x<r el decremento podría ocurrir por mortalidad u otras causas. Una vez alcanzada la edad r, la única causa de decremento es por mortalidad. La densidad de nuevos ingresos a la edad “a” está dada por n(u) y la densidad de aquellos que alcanzan la edad “x” en el tiempo “t” está dada por n(u)s(x) donde u es la edad de ingreso al plan.

Suponiendo que las contribuciones futuras, se hacen en base a una fracción del salario, se determina su vpa a la edad x+h como: $VPA_{x+h} = c\,(AS)_{x+h} \int_0^{w-x-h} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} \cdot \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} . dt$

Por otra parte, suponiendo que el beneficio obtenido por jubilación es una fracción del salario al momento de jubilarse, su vpa en x+h sería

$$VPA_{x+h} = \int_{\alpha-x-h}^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} . \mu_{x+h+t}^{(r)} . R(x,h,t) . \overline{a}_{x+h+t}^{r} . dt \;.$$

Siendo α la edad mínima de jubilación

1.2 - Ruina

Los beneficios cobrados por los integrantes del plan deben balancearse actuarial y financieramente con las contribuciones de los activos, pero por múltiples causas (tasas de interés que no cumplan las previsiones, cuestiones legales, etc…) esto no siempre se logra en la práctica. Sea u=u(0) el patrimonio inicial del fondo de pensión, c(t) las contribuciones cobradas hasta el año t, i(t) los intereses generados (eventualmente pagados) hasta el año t y j(t) los pagos de jubilaciones hasta el año t, entonces u(t)=u+c(t)+i(t)-j(t)

Dado un patrimonio inicial u, definimos como ruina al primer momento T en el cual el patrimonio cae por debajo de 0.

Ruina no es sinónimo de insolvencia, pero su análisis y previsión permiten hacer ajustes en la tasa de contribuciones que permitan la supervivencia del sistema de pensiones y es una medición del riesgo financiero del fondo de pensiones [2]/

1.3 – La tasa de interés como un camino aleatorio

Un paseo aleatorio simple puede considerarse como un proceso estocástico, donde cada elemento de la secuencia X_0, X_1,…X_n es una variable aleatoria que se corresponde con un valor de una cierta variable de estudio, teniendo X un cierto recorrido R y una probabilidad de transición que lleva que siendo $X_i=x_i$, exista una probabilidad p_i de que $X_{i+1}=x_{i+1}$.

El concepto de camino aleatorio es una formalización matemática resultante de sucesivos paseos aleatorios, el término fue introducido por Karl Pearson en 1905 y en el campo de la economía ha sido utilizado por Burton G. Malkiel en su obra "un paseo por Wall Street".

Se plantea trabajar con la tasa de interés con un modelo simple que refleje su aleatoriedad, para ello y a partir de los datos tomados de la Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay SA, se tomaron las diferencias de la tasa de interés efectiva anual en dos periodos mensuales consecutivos y se estimó la distribución de la misma, de tal manera que:

$$i_{k+1} = i_k + \phi(1)$$

Siendo i_k la tasa efectiva anual en el mes k-ésimo y $\phi(1)$ una variable aleatoria que incorpora la variación de dicha tasa en el periodo unitario.

[2] / Existe profusa literatura que cuestiona la utilización de la probabilidad de ruina como medida del riesgo financiero, pero nadie discute que es una primera aproximación.

2 – Resultados

2.1 – Aleatoriedad de la TEA

Se procede primero a visualizar la densidad de los datos para un conjunto de 120 meses, obteniendo el resultado exhibido en la Figura 1:

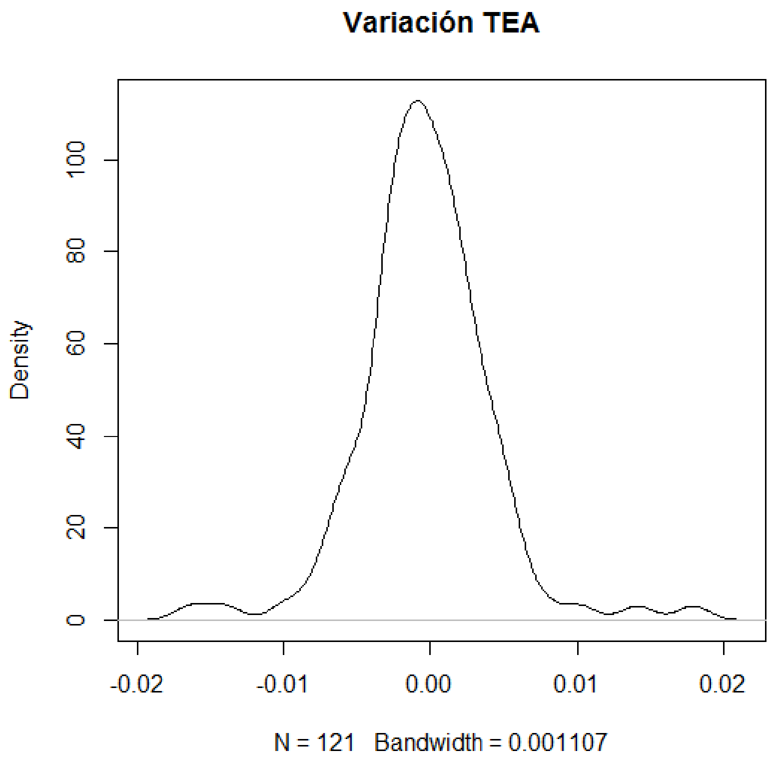

Figura 1

Esta figura nos presenta valores extremos que no se corresponden con una distribución normal, esto se comprueba con un test de Shapiro-Wilk , el mismo a partir de una muestra (x1,…,xn) ordena los valores de menor a mayor (x(1),…x(n)) y calcula el estadístico de contraste obteniendo un p-valor de $3.622x10^{-5}$, no obstante ello, se verifico la presencia de 4 valores considerados "outliers" y que pueden equipararse a shock aleatorios (Barszcz-Santiñaque,[5]), lo que podría evidenciar la presencia de dos distribuciones superpuestas: una a determinar y otra que modele la presencia o no de dichos shocks.

Entonces se quitan los datos que presenten una variación de la tasa que sea superior a 10 veces la variación precedente y se grafica nuevamente la distribución que se puede apreciar en la figura 2:

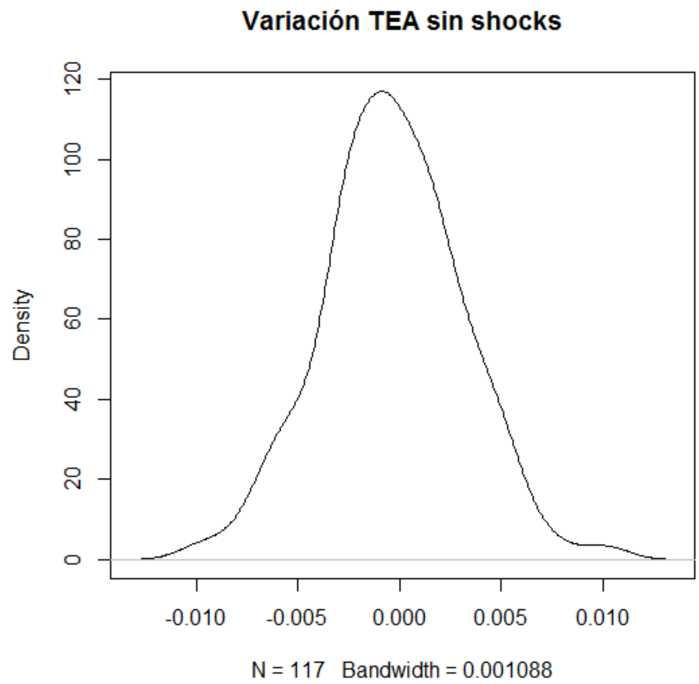

Figura 2

Y al aplicar el test de Shapiro-Wilx se obtiene un p-valor de 0,9577, también se simulan 117 valores con distribución normal cuya media y varianza coinciden con las estimadas para los datos y se aplica un test de Kolmogorov-Smirnov obteniéndose un p-valor de 0,8723, de ambos resultados se decide no rechazar la normalidad de los datos.

Entonces se estima que las variaciones se distribuyen normal con media -0.000357265 y desvío estándar 0.003440612.

2.1.1 - Verificación

Con motivo de verificar los resultados empíricos se procede a realizar dos procedimientos: a) una verificación visual, simulando varias veces un paseo aleatorio con los parámetros estimados y b) obtener el valor futuro que genera un valor presente de 1000 unidades monetarias, mediante simulación de la evolución de la tasa y mediante datos empíricos, se simula 100.000 veces este procedimiento y se obtiene el promedio y varianza de los errores.

La figura 3 muestra 9 simulaciones, donde se aprecia en rojo la evolución de la tasa con valores empíricos y en negro la evolución de la tasa mediante un paseo aleatorio.

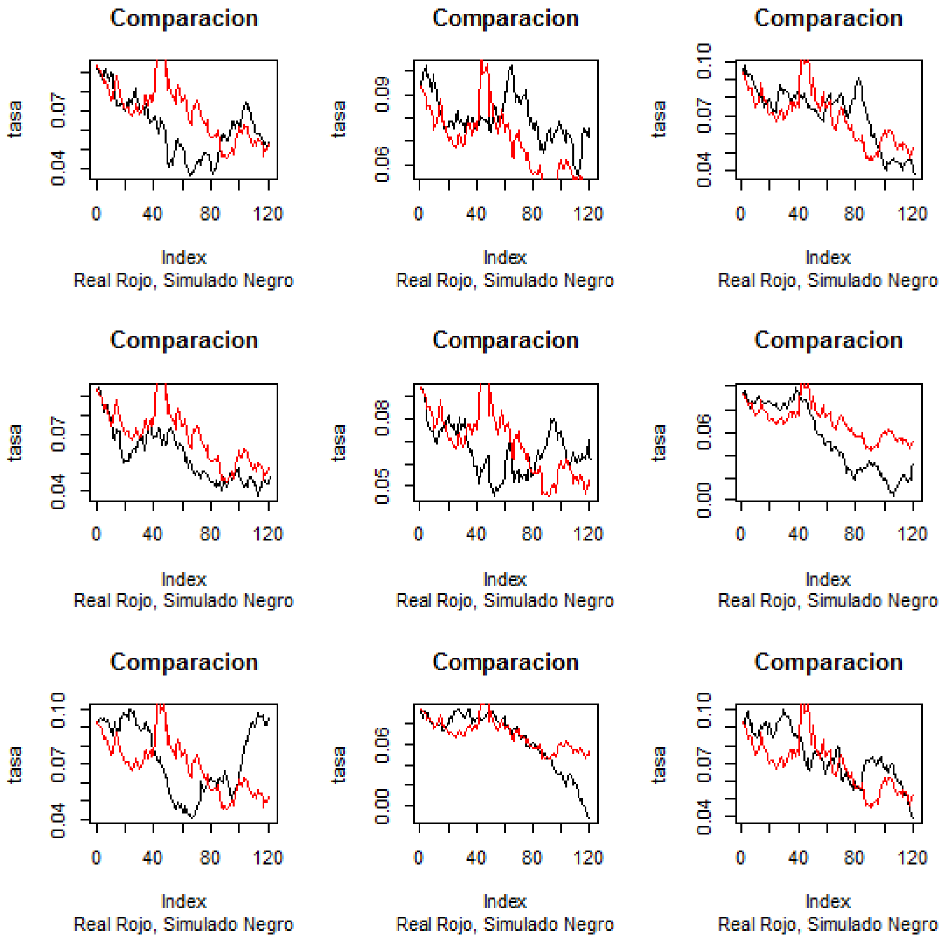

Figura 3

Por otra parte se define:

$$Error = \frac{|\text{VF empírico} - \text{VF simulado}|}{\text{VF empírico}}$$

Error Promedio en las 100.000 simulaciones: 0,03211643

Desviación estándar del error en las 100.000 simulaciones: 0,024432

De ambas comprobaciones se considera que el método del paseo aleatorio, con los parámetros estimados y para este conjunto de datos es apropiado para simular la evolución de la TEA.

2.2 – Aplicación al desarrollo de un plan de pensión

Comparamos ahora el desarrollo de un plan de pensión modelado a partir de la probabilidad de ruina a partir de una TEA constante del 3% anual (Barszcz- De Armas,[5]) una TEA modelada mediante un paseo aleatorio. Los supuestos utilizados en este trabajo coinciden con los de la TEA constante que eran los siguientes:

- Los participantes del plan de pensión ingresan al sistema con entre 20 y 25 años.
- Un participante con 20 años gana en promedio 14.000 y año a año se ajusta por un aumento del 6% y un ajuste extra por experiencia y ascensos del 2%
- Se aporta una fracción f de los ingresos anualmente.
- Las únicas situaciones de decremento son por fallecimiento y jubilación.
- La edad de jubilación está entre 60 y 70 años inclusive.
- El valor inicial de la jubilación es el mínimo entre 60.000 y un 50% del salario al jubilarse y se cobran los beneficios anualmente.
- Las jubilaciones se ajustan anualmente por IPC, suponemos una tasa del 8%.
- La edad máxima de sobrevida son 100 años.
- Se utilizan tablas de mortalidad y estructuras de población publicadas por el INE.
- Se calcula $\Psi(u,20)$ para un valor de f de 0,30 (proporción de los ingresos que aportan los integrantes al sistema).

Adicionalmente se considera un paseo aleatorio con incrementos normales de media 0 y el mismo desvío que se obtuvo en el análisis de ajuste de los parámetros del paseo aleatorio.

2.3 - Comparación de la evolución del fondo de pensión

La figura 3 muestra la evolución de la tasa aleatoria (negro) contra una tasa constante del 3% (azul)

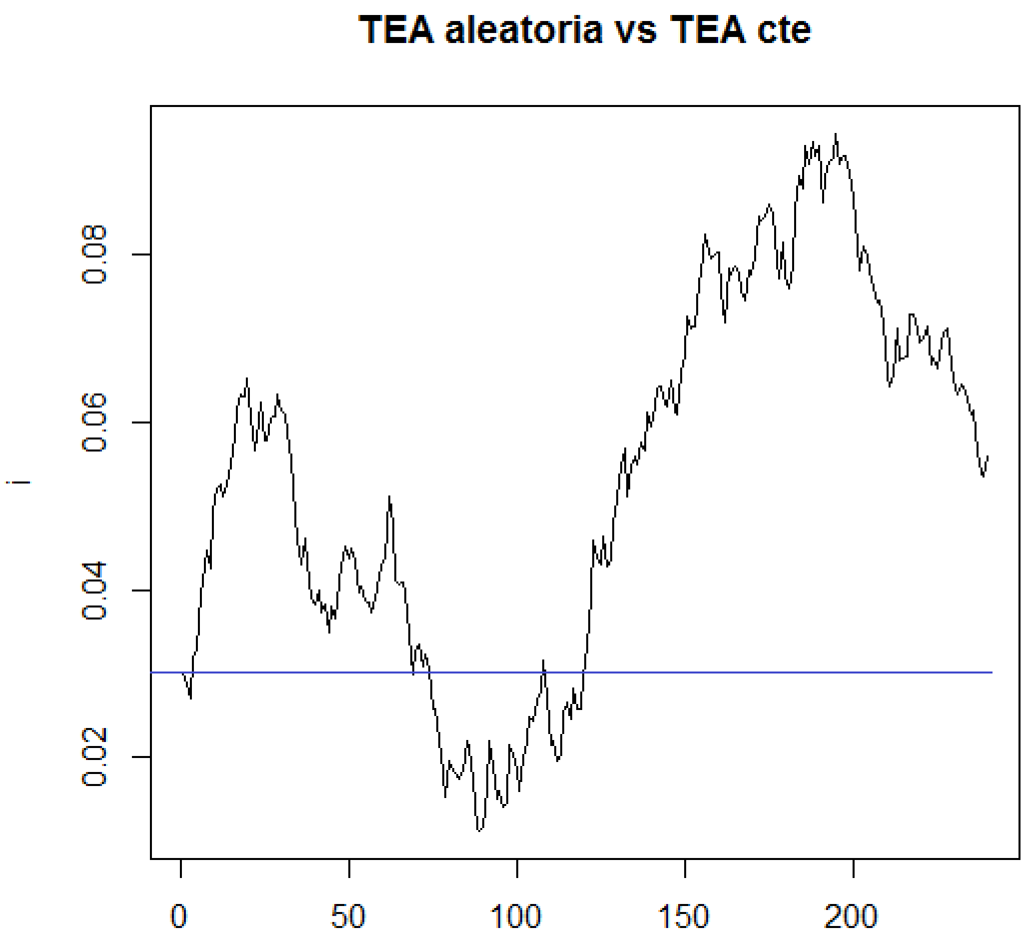

Figura 4

Se realizan entonces 100 simulaciones con la evolución de 20 años de la población simulada, aplicándole al dinero del fondo de pensiones los dos escenarios de TEA planteados en esta investigación, la Tabla 1 compara el porcentaje de veces que la ruina ocurre en el año t.

	T			
	11	12	13	14
TEA Cte	19%	77%	4%	0%
TEA Aleatoria	5%	59%	32%	4%

Tabla 1

Conclusiones:

Para el conjunto de datos obtenidos, se logró modelar la evolución mensual de la TEA mediante un camino aleatorio cuya distribución de la diferencia entre los valores se distribuyen Normal(-0.000357265, 0.003440612^2) , se calculó el error a partir de un capital de $1000 dando una diferencia promedio del 3,2% en 100000 simulaciones. Considerando apropiada esta manera de modelar la evolución de la TEA se simulo la probabilidad de ruina y el momento T de la ruina para una población de activos y pasivos, comparándola con los resultados obtenidos a partir de una TEA constante, se obtuvo la misma probabilidad de ruina para los primeros 20 años, variando levemente el rango de T, en el modelo constante admite valores entre 11 y 13 años, mientras que en el modelo aleatorio aparece también 14 años como un resultado posible.

Bibliografía

[1] Bowers, N.; Gerber,H; Hickman, J; Jones, D; Nesbitt, C. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States of America. 753 pp.
[2] Hossack, I.B.; Pollard, J.H.; Zehnwirth, B. (1983). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge University, 270 pp.
[3] Lopez Cachero, M., (1996). *Estadística para Actuarios*. Editorial MAPFRE. Madrid. 480 p.
[4] Barszcz – Santiñaque (2015), *Estudio de la tasa de interés como variable aleatoria y su impacto en el área Actuarial*.
[5] Barszcz – De Armas (2015), *Planes de pensión: Métodos de costo actuarial.*
[6] Karkin, S. & Taylor, H.M. *A first course in Stochastic processes*, Academic Press (2da Ed. 1975).
[7] Resnik, *Adventures i Stochastic Processes, Birkhauser*, 1992.
[8] Pearson K. The Problem of the Random Walk, 1905.
[9] www.bevsa.com.uy Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay SA.